Wykrywanie przyczynowości między sygnałami medycznymi lub sygnałami biomedycznymi o różnych częstotliwościach

M. W. Kalinowski
E-mail: markwkal@bioexploratorium.pl

10 czerwca 2014

Istotną sprawą w kwestii analizy sygnałów medycznych, tj. EEG (elektroencefalograficznych), EKG (elektrokardiograficznych), magneto-encefalograficznych, elektromiograficznych oraz także sygnałów wysyłanych między biomolekułami, komórkami w organizmie jest analiza przyczynowa dwóch różnych sygnałów. Będziemy badali wpływ przyczynowy (jeśli jest) jednego sygnału na drugi w taki sposób, że sygnał będący przyczyną poprzedza sygnał będący skutkiem. W tym przypadku stosujemy kryterium przyczynowości sformułowane przez Grangera i zastosowane przez niego w ekonomii do analizy szeregów czasowych w makroekonomii i finansach. Kryterium to możemy sformułować w następujący sposób.

Rozpatrzmy model liniowy jednokanałowy

$$x(t)=\sum_{j=1}^{p}A_jx(t-j)+E(t). \tag{1}$$

$x(t),E(t)$ są zmiennymi losowymi dla $t\in\mathbb{R}$. W dziedzinie częstotliwości mamy

$$\widetilde{x}(\omega)=\widetilde{A}(\omega)\widetilde{x}(\omega)+\widetilde{E}(\omega),\quad \omega=2\pi f. \tag{2}$$

W przypadku modelu wielokanałowego (k-kanałowego) mamy

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{p}A_jx_i(t-j)+E_i(t),\quad i=1,2,\dots,k. \tag{3}$$

W dziedzinie częstotliwości mamy

$$\widetilde{x}_i(\omega)=\sum_{j=1}^{k}\widetilde{A}_i(\omega)\widetilde{x}_i(\omega)+\widetilde{E}_i(\omega). \tag{4}$$

Jeśli dokonamy dopasowania $x(t)$ ($x_i(t)$), wyznaczając reszty dopasowania $E_i(t)$, możemy wyznaczyć

$$V_{ij}=\big\langle(E_i(t)-\langle E_i(t)\rangle)(E_j(t)-\langle E_j(t)\rangle)\big\rangle, \tag{5}$$

gdzie V_{ij} jest macierzą kowariancji, $\langle E_i(t)\rangle$ jest wartością oczekiwaną. Określimy

$$\sigma_{ij}^2=|V_{ij}|. \tag{6}$$

To samo możemy uczynić rozpatrując model $(k-1)$-kanałowy (usuwając jeden z kanałów, np. j_0). Mamy wtedy

$$(\sigma_{ij}^{(j_0)})^2=|V_{ij}^{(j_0)}|,\quad i,j=1,2,\dots,k,\ i,j\neq j_0. \tag{7}$$

Możemy określić wielkość

$$I_{ij_0} = 1 - \frac{\sigma_{ii}^2}{(\sigma_{ii}^{(j_0)})^2} = 1 - \frac{V_{ii}}{V_{ii}^{(j_0)}}, \quad 0 \leqslant I_{ij_0} \leqslant 1. \tag{8}$$

Jeśli I_{ij_0} jest bliskie zeru, to kanał j_0 nie ma wpływu na kanał $i \neq j_0$, jeśli $I_{ij_0} \sim 1$, to sygnał j_0 ma duży wpływ na i. Zatem kryterium przyczynowości Grangera w przypadku k-kanałowego modelu ma postać

$$V_{ii} < V_{ii}^{(j_0)}. \tag{9}$$

Kanał j_0 ma wpływ na kanał i. W naszej notacji posłużyliśmy się $\langle E_i(t) \rangle$, co oznacza uśrednienie ze względu na próbę statystyczną. Możemy jednak używać normalnej notacji rachunku prawdopodobieństwa

$$V_{ij} = E\big((E_i(t) - E(E_i(t)))(E_j(t) - E(E_j(t)))\big). \tag{10}$$

Kryterium Grangera stosujemy w zasadzie do przypadku tylko z jedną częstotliwością. Możemy jednak spróbować zastosować je do przypadku różnych częstotliwości w następujący sposób.

Rozpatrzmy szereg czasowy

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cos(\omega_i t) + \varepsilon_1(t), \quad b \leqslant \omega_i \leqslant a, \tag{11}$$

gdzie $\varepsilon_1(t)$ jest szumem.

Łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} x^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cos(2\omega_i t) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} x_i x_j \cos(\omega_i - \omega_j)t \\ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} x_i x_j \cos(\omega_i + \omega_j)t + 2\varepsilon_1(t) \sum_{i=1}^{N} x_i \cos(\omega_i t) + \varepsilon_1^2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Zadanie, jakie stawiamy sobie teraz, to porównanie $x(t)$ z szeregami czasowymi typu

$$\overline{x}_i(t) = \overline{x}_{i0} \cos 2\omega_i t + \overline{\varepsilon}_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{13}$$

$$\overline{x}_{ij}(t) = \overline{x}_{ij0} \cos(\omega_i + \omega_j)t + \overline{\varepsilon}_{ij}(t), \qquad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{14}$$

$$\overline{\overline{x}}_{ij}(t) = \overline{\overline{x}}_{ij0} \cos(\omega_i - \omega_j)t + \overline{\overline{\varepsilon}}_{ij}(t), \qquad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{15}$$

a więc z szeregami czasowymi z drugą harmoniczną oraz z częstościami mieszanymi. $\overline{\varepsilon}_i(t)$, $\overline{\varepsilon}_{ij}(t)$, $\overline{\overline{\varepsilon}}_{ij}(t)$ są szumami drugiej harmonicznej oraz częstości mieszanych: sumacyjnej i różnicowej. Bezpośrednie porównywanie $x(t)$ i $\overline{x}_i(t)$, $\overline{x}_{ij}(t)$, $\overline{\overline{x}}_{ij}(t)$ nie jest możliwe. Możemy jednak próbować porównać $x^2(t)$ z $\overline{x}_i(t)$, $\overline{x}_{ij}(t)$, $\overline{\overline{x}}_{ij}(t)$. W tym celu musimy zastosować filtry do sygnału $x^2(t)$. Niech tym filtrem będzie w dziedzinie czasu $h(t)$. Będziemy więc rozpatrywać sygnał

$$y(t) = x^2(t) * h(t) = \int_0^\infty x^2(\tau) h(t - \tau)\, d\tau. \tag{16}$$

W zależności od porównywanych sygnałów będziemy stosowali różne filtry. Jednakże w pierwszej kolejności będziemy musieli zastosować filtr górnoprzepustowy w celu wyeliminowania składowej stałej z (12), tj. $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$. W następnej kolejności będziemy postępować w zależności od rozpatrywanego sygnału, który chcemy porównać z odfiltrowanym górnoprzepustowo $x^2(t)$, tj. bez składowej stałej. W przypadku badania wpływu częstotliwości podwojonej (drugiej harmonicznej), np. $2\omega_{i_0}$, i_0 ustalone, zastosujemy filtr selektywny taki, że przepuszcza on tylko $2\omega_{i_0}$. Taki filtr realizowany w dziedzinie częstotliwościowej przez deltę Diraca $\delta_{2\omega_{i_0}}$ jest filtrem idealnym i należy użyć filtru o charakterystyce rozmytej wokół częstości $2\omega_{i_0}$. Oznaczając odfiltrowany sygnał przez $\widetilde{y}(t)$ badamy sumę sygnałów

$$z(t) = \widetilde{y}(t) + \overline{x}_{i_0}(t). \tag{17}$$

Mamy

$$\widetilde{y}(t) = \widetilde{y}_0 \cos 2\omega_{i_0}(t) + \widetilde{\varepsilon}_{i_0}(t). \tag{18}$$

Jeżeli wariancja sumy sygnałów $z(t)$ będzie mniejsza niż wariancja sygnału $\widetilde{y}(t)$, to zgodnie z kryterium przyczynowości Grangera będziemy mówili, że sygnał drugiej harmonicznej wywiera wpływ przyczynowy na sygnał $x(t)$ (oczywiście mówimy tutaj o konkretnej podwojonej częstotliwości $2\omega_{i_0}$). Ilościowo możemy to zapisać

$$GCI|_{\overline{x}_{i_0}(t)\to x(t)} = \log\Big(\frac{\widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\varepsilon}_{i_0}}\Big) < 0, \tag{19}$$

gdzie $\widetilde{\varepsilon}$ jest wariancją sumy sygnałów. Oczywiście sygnał drugiej harmonicznej musi poprzedzać sygnał badany. W podobny sposób możemy też sformułować kryteria wpływu częstotliwości różnicowych, a także sumacyjnych, na sygnał wyjściowy. Musimy tylko zastosować odpowiednie filtry w dziedzinie częstotliwości. Możemy również badać wpływ odpowiednich sum drugich harmonicznych, tj.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{x}_{i_k 0} \cos(2\omega_{i_k} t), \tag{20}$$

częstotliwości różnicowych

$$\sum_{\substack{k_1,k_2 \\ i_{k_1} > j_{k_2}}}^{K} \overline{x}_{i_{k_1} j_{k_2} 0} \cos(\omega_{i_{k_1}} - \omega_{j_{k_2}})t, \tag{21}$$

częstotliwości sumacyjnych

$$\sum_{\substack{k_1,k_2 \\ i_{k_1} > j_{k_2}}}^{K} \overline{\overline{x}}_{i_{k_1} j_{k_2} 0} \cos(\omega_{i_{k_1}} + \omega_{j_{k_2}})t \tag{22}$$

na sygnał wyjściowy.

W przypadku dużej ilości różnych częstości stosujemy tylko filtry górnoprzepustowe. Interesującą rzeczą jest zbadanie wpływu składowej stałej (jeśli jest) na sygnał wyjściowy. W tym celu stosujemy filtr dolnoprzepustowy do sygnału $x^2(t)$.

Następnym problemem, który możemy tu postawić, jest problem odwrotny, tj. wpływ sygnału $x(t)$ na sygnały drugiej harmonicznej lub sygnały o częstotliwości różnicowej, czy też sumacyjnej. W tej sytuacji kryterium Grangera będzie działało w kierunku przeciwnym. Szczególnie prostą sytuację mamy w przypadku pojedynczej częstotliwości

$$x(t) = a\cos\omega t + \varepsilon(t) \tag{23}$$

$$x^2(t) = \frac{a^2}{2}\cos 2\omega t + 2a\overline{\varepsilon}(t)\cos\omega t + \frac{a^2}{2} + \overline{\varepsilon}^2(t), \tag{24}$$

wtedy porównujemy $x^2(t)$ z sygnałem drugiej harmonicznej

$$y(t) = y_0 \cos 2\omega t + \varepsilon_1(t). \tag{25}$$

W przypadku dwóch częstości

$$x(t) = a\cos\omega_1 t + b\cos\omega_2 t + \overline{\varepsilon}_1(t) \tag{26}$$

mamy

$$\begin{aligned} x^2(t) = \frac{a^2}{2}\cos 2\omega_1 t + \frac{b^2}{2}\cos 2\omega_2 t + 2a\overline{\varepsilon}_1\cos\omega_1 t + 2b\overline{\varepsilon}_1\cos\omega_2 t \\ + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \overline{\varepsilon}_1^2(t) + ab\big(\cos(\omega_1-\omega_2)t + \cos(\omega_1+\omega_2)t\big). \end{aligned} \tag{27}$$

Wtedy odpowiednio odfiltrowany sygnał $x^2(t)$ porównujemy z

$$\overline{\overline{x}}_i(t) = \overline{\overline{x}}_{i0}\cos 2\omega_i t + \overline{\overline{\varepsilon}}_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{28}$$

$$\overline{\overline{x}}_3(t) = \overline{\overline{x}}_{30}\cos(\omega_1-\omega_2)t + \overline{\overline{\varepsilon}}_3(t), \tag{29}$$

$$\overline{\overline{x}}_4(t) = \overline{\overline{x}}_{40}\cos(\omega_1+\omega_2)t + \overline{\overline{\varepsilon}}_4(t) \tag{30}$$

poprzez badanie sumy odfiltrowanego sygnału z sygnałami (28)–(30). W przypadku jednej lub kilku częstości (np. dwu) wystarczy tylko filtracja górnoprzepustowa.

Przejdźmy teraz do przypadku trzeciej harmonicznej. W tym przypadku ograniczymy się tylko do jednej częstości. Mamy

$$x(t) = a\cos\omega t + \varepsilon(t) \tag{31}$$

$$\begin{aligned} x^3(t) = \big(\varepsilon^3(t) + \tfrac{3}{2}a^2\varepsilon(t)\big) + \big(\tfrac{3}{4}a^3 + 3\varepsilon^2(t)a\big)\cos\omega t \\ + \tfrac{3}{2}\varepsilon(t)a^2\cos 2\omega t + \tfrac{1}{4}a^3\cos 3\omega t. \end{aligned} \tag{32}$$

Sygnał $x^3(t)$ zawiera trzecią harmoniczną. Zatem możemy badać wpływ trzeciej harmonicznej na $x(t)$ poprzez badanie sumy sygnałów (po zastosowaniu filtru górnoprzepustowego na $x^3(t)$):

1) $y(t)$ — odfiltrowany $x^3(t)$,

2) $$u(t) = u_0\cos 3\omega t + \varepsilon_4(t), \tag{33}$$

stosując kryterium Grangera tak, jak w przypadku drugiej harmonicznej.

Można stworzyć odpowiedni formalizm, w którym uwzględnimy dwie możliwości: N dowolnych częstości kołowych ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, oraz nieliniowość rzędu $n = 2, 3, \ldots$. W tym wypadku zarówno N jak i n są dowolne. Rozpatrujemy wtedy oddzielnie przypadek $n = 2k$ i $n = 2k+1$, tj. parzystego i nieparzystego. Łatwo uogólniamy i mamy sygnał $x^n(t)$. W tym przypadku otrzymujemy sumę wyrazów n-tych harmonicznych każdej częstotliwości

$$n\omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{34}$$

Otrzymujemy także częstotliwości mieszane

$$\omega_{\text{mieszane}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\omega_i, \quad \text{gdzie } \sum_{i=1}^{N} |m_i| = n,\ m_i \in Z. \tag{35}$$

W przypadku, gdy $n = 2k$ (parzyste), otrzymujemy również człon stały, który jest nieobecny w przypadku nieparzystym. W pełnej sumie wystąpią również, podobnie jak we wzorze (12), człony z niższymi częstotliwościami pomnożone przez odpowiednie potęgi $\varepsilon(t)$. W przypadku n parzystego stosujemy filtrację górnoprzepustową celem odfiltrowania składowej stałej. W przypadku n nieparzystego taka filtracja nie jest w ogólności potrzebna. Celem zbadania wpływu przyczynowego wyższych harmonicznych na oryginalny sygnał dokonujemy odpowiedniej filtracji sygnału $x^n(t)$ za pomocą filtru selektywnego wokół $n\omega_i$ lub wokół dowolnej częstotliwości mieszanej (35). Wpływ składowej stałej w przypadku parzystym możemy zbadać podobnie jak dla $n = 2$, dokonując filtracji dolnoprzepustowej. Otrzymane odfiltrowane sygnały sumujemy z odpowiednimi sygnałami wysokoczęstotliwościowymi i stosujemy kryterium Grangera dla dwu różnych wariancji. Jeśli chcemy zbadać wpływ sygnału małej częstotliwości (tj. o częstości kołowej ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$) lub też sumy sygnałów małej częstotliwości czy też pełnego sygnału $x(t)$, postępujemy w sposób odwrotny. Dotyczy to także sygnału stałego (składowej stałej). Łatwo zauważyć, że badając wyższe harmoniczne możemy badać związki przyczynowe między sygnałami o dużej i małej częstotliwości. Metoda ta jednak nie jest zbyt wygodna. Dlatego też w dalszym ciągu rozpatrzymy inne metody związane z modulacją sygnału o wielkiej częstotliwości przez sygnał o małej częstotliwości.

Mamy

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \tag{36}$$

$$y(t) = y_0 \cos \Omega t. \tag{37}$$

$x(t)$ jest sygnałem o małej częstotliwości, a $y(t)$ sygnałem o wielkiej częstotliwości. Będziemy rozpatrywali tzw. modulację częstotliwości FM (*Frequency Modulation*) i modulację fazy (*Phase Modulation*):

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{FM}}(t) &= y_0 \cos\Big(\Omega t + k_{\mathrm{f}} \int x(t)\, dt + \varepsilon_1\Big) \\ y_{\mathrm{PM}}(t) &= y_0 \cos(\Omega t + k_{\mathrm{f}} \cos \omega t + \varepsilon_1), \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie ε_1 jest szumem, a k_{f} głębokością modulacji. Otrzymamy w obydwu przypadkach efektywną częstotliwość sygnału złożonego

$$\Omega_{\mathrm{ef}} = \Omega + k_{\mathrm{f}} \cos \omega t + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad \text{dla FM} \tag{39}$$

$$\overline{\Omega}_{\mathrm{ef}} = \Omega - k_{\mathrm{f}} \sin \omega t + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad \text{dla PM.} \tag{40}$$

Sygnał zmodulowany możemy również zapisać

$$y_{\mathrm{M}}(t) = y_0 \cos(\theta_i(t) + \varepsilon_i), \tag{41}$$

$$\theta_1(t) = \Omega t + \varphi_0 + k_{\mathrm{f}} \int x(t)\, dt, \tag{42}$$

$$\theta_2(t) = \Omega t + \varphi_0 + k_{\mathrm{f}} x(t), \tag{43}$$

gdzie φ_0 oznacza fazę początkową, przyjmowaną za zero.

Sygnał modulujący może mieć bardziej złożoną postać

$$x(t) = \Delta\theta_1 \sin \omega_1 t + \Delta\theta_2 \sin \omega_2 t. \tag{44}$$

Sygnał zmodulowany możemy zapisać w postaci zespolonej

$$z(t) = \mathrm{Re}\Big\{ y_0 e^{\mathrm{j}(\Omega t + x(t) + \overline{\varepsilon})} \Big\} = y_0 \cos(\Omega t + \Delta\theta_1 \sin \omega_1 t + \Delta\theta_2 \sin \omega_2 t + \overline{\varepsilon}). \tag{45}$$

Korzystając z postaci wykładniczej mamy

$$z(t) = y_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} J_n(\Delta\theta_1) J_m(\Delta\theta_2) \cos\big[(\Omega + n\omega_1 + m\omega_2)t + \overline{\varepsilon}\big]. \tag{46}$$

W przypadku pojedynczego sygnału

$$y_{\mathrm{FM}}(t) = y_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(k_{\mathrm{f}}) \cos(\Omega t + n\omega t + \varepsilon_1) \tag{47}$$

$$\begin{aligned} J_n(k_{\mathrm{f}}) &= J_{-n}(k_{\mathrm{f}}), \quad n \text{ parzyste},\\ J_n(k_{\mathrm{f}}) &= -J_{-n}(k_{\mathrm{f}}), \quad n \text{ nieparzyste}, \end{aligned} \tag{48}$$

$J_n(x)$ jest funkcją Bessela n-tego rzędu (I rodzaju).

Zauważmy, że gdy

$$z_{\mathrm{PM}}(t) = y_0 e^{\mathrm{j}k_{\mathrm{p}}x(t)} e^{\mathrm{j}\Omega t} e^{\mathrm{j}\widetilde{\varepsilon}} \tag{49}$$

$$y_{\mathrm{PM}}(t) = \mathrm{Re}\, z_{\mathrm{PM}}(t) \tag{50}$$

$$\theta_{\mathrm{PM}}(t) = \Omega t + k_{\mathrm{p}} x(t) + \widetilde{\varepsilon} \tag{51}$$

$$\Omega_{\mathrm{PM}}(t) = \Omega + k_{\mathrm{p}} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d\widetilde{\varepsilon}}{dt} \tag{52}$$

$$\Delta\theta_{\mathrm{PM}} = k_{\mathrm{p}} |x(t)|_{\max} + E(\widetilde{\varepsilon}(t))_{\max}, \tag{53}$$

gdzie $E(\widetilde{\varepsilon}(t))_{\max}$ jest wartością oczekiwaną szumu i

$$|\Delta\theta_{\mathrm{PM}}| \ll 1, \tag{54}$$

możemy dokonać następującego przybliżenia

$$z_{\mathrm{PM}}(t) \approxeq y_0(1 + \mathrm{j}k_{\mathrm{p}} x(t) + \mathrm{j}\widetilde{\varepsilon}). \tag{55}$$

Zatem

$$y_{\mathrm{PM}}(t) = \mathrm{Re}\, z_{\mathrm{PM}}(t) = y_0\big(\cos\Omega t - y_0(k_{\mathrm{p}} x(t) + \varepsilon)\sin\Omega t\big). \tag{56}$$

Niech

$$x(t) = x_0 \sin\omega t. \tag{57}$$

Zatem otrzymujemy

$$y_{\mathrm{PM}}(t) = y_0\big(\cos\Omega t - \tfrac{1}{2}k_{\mathrm{p}} x_0 \cos(\Omega - \omega)t + \tfrac{1}{2}k_{\mathrm{p}} x_0 \cos(\Omega + \omega)t - \varepsilon sin\Omega t\big). \tag{58}$$

Z drugiej strony możemy korzystając ze wzoru (47) otrzymać wzór przybliżony

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{FM}}(t) = y_0\Big\{ & J_0(k_{\mathrm{f}}) \cos(\Omega t + \varepsilon_1) + J_1(k_{\mathrm{f}})\big[\cos((\Omega - \omega)t + \varepsilon_1) + \cos((\Omega + \omega)t + \varepsilon_1)\big] \\ & + J_2(k_{\mathrm{f}})\big[\cos((\Omega - 2\omega)t + \varepsilon_1) + \cos((\Omega + 2\omega)t + \varepsilon_1)\big]\Big\}. \end{aligned} \tag{59}$$

Mając tak zmodulowane sygnały możemy postawić zagadnienie wpływu przyczynowego sygnału $x(t)$ na sygnał wielkiej częstotliwości w następujący sposób. Niech będzie dany sygnał $\widetilde{y}(t)$ wielkiej częstotliwości, który chcemy porównać z sygnałem danym wzorem (36). W tym celu tworzymy sygnał zmodulowany $y_{\mathrm{FM}}(t)$ lub $y_{\mathrm{PM}}(t)$ i porównujemy go z sygnałem $\widetilde{y}(t)$ badając sumę

$$\widetilde{y}(t) + y_{\mathrm{PM}}(t) + \widetilde{\varepsilon} \tag{60}$$

w prostokątnym oknie czasowym

$$t_1 < t < t_2. \tag{61}$$

Jeżeli wartość oczekiwana (w tym oknie czasowym) sygnału (60) będzie mniejsza niż danego sygnału $\widetilde{y}(t)$, to twierdzimy, że $x(t)$ ma wpływ przyczynowy (zgodnie z Grangerem) na sygnał $\widetilde{y}(t)$. Okno czasowe prostokątne ze względu na wygodę matematyczną może być zastąpione przez okno gładkie, np. typu Gaussa. Tak będzie w przypadku pełnej modulacji. W przypadku, gdy mamy do czynienia z przybliżeniem typu (55), stosujemy poprzednie metody poznane przy okazji badania wpływu wyższych harmonicznych oraz częstotliwości mieszanych. Oczywiście pamiętamy, że sygnał będący przyczyną musi poprzedzać badany sygnał. Czasami mamy do czynienia z sygnałem złożonym, np.

$$y_{\mathrm{wy}}(t) = a(y_{\mathrm{we}}(t))^n \tag{62}$$

$$y_{\mathrm{we}}(t) = y_0 \cos(\Omega t + k_{\mathrm{p}} x(t) + \varepsilon_1(t)) + \varepsilon_2(t), \tag{63}$$

gdzie $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ są niezależnymi szumami.

Niech $n = 2$. Łatwo zauważyć, że

$$y_{\mathrm{wy}}(t) = \tfrac{1}{2} a y_0^2 (1 + \cos(2\Omega t + 2k_{\mathrm{p}} x(t) + 2\varepsilon_1(t))) + 2y_0 a \varepsilon_2(t) \cos(\Omega t + k_{\mathrm{p}} x(t) + \varepsilon_1(t)) + \varepsilon_2^2(t). \tag{64}$$

Stosując filtr górnoprzepustowy eliminujemy składową stałą i dostajemy

$$\tfrac{1}{2} a y_0^2 \cos(2\Omega t + 2k_{\mathrm{p}} x(t) + 2\varepsilon_1(t)) + 2y_0 a \varepsilon_2(t) \cos(\Omega t + k_{\mathrm{p}} x(t) + \varepsilon_1(t)) + \varepsilon_2^2(t). \tag{65}$$

Zakładamy, że

$$x(t) = x_0 \sin \omega t + \widetilde{\varepsilon}_1(t). \tag{66}$$

Wtedy powstaje problem wpływu przyczynowego $x(t)$ na sygnał $\widetilde{y}(t)$ powstający w podobny sposób, jak nasz złożony sygnał $y_{\mathrm{wy}}(t)$. W celu zbadania wpływu dokonujemy eliminacji niższych częstotliwości przez splot z filtrem górnoprzepustowym powyżej częstotliwości $\Omega + \Delta\Omega$, gdzie

$$\Delta\Omega = k_{\mathrm{p}} |x(t)|_{\max} + E(\varepsilon_1(t)). \tag{67}$$

Następnie stosujemy prostokątny filtr czasowy (lub jego wygładzenie, np. Gaussowskie) i porównujemy sygnał z sygnałem

$$\tfrac{1}{2} y_0 \cos(2\Omega t + 2k_{\mathrm{p}} x(t) + 2\varepsilon_1(t)). \tag{68}$$

W ten sposób kombinujemy metodę drugiej harmonicznej z opisaną powyżej.

Całą procedurę możemy opisać w ogólniejszej formie wprowadzając pojęcie *operatora modulacji*

$$\mathcal{M}(s(t)) = a + bs(t) + \mathrm{j}c\widehat{s}(t), \tag{69}$$

gdzie a, b, c — stałe,

$$\widehat{s}(t) = \mathcal{H}(s(t)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\!nt_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi t} * s(t) \tag{70}$$

$$s(t) = \mathcal{H}^{-1}(s(t)) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{s}(\tau)}{t - \tau}\, d\tau = -\frac{1}{\pi t} * \widehat{s}(t), \tag{71}$$

$\mathcal{H}$ oznacza transformatę Hilberta, $\mathcal{H}^{-1}$ jej odwrotną, $\widehat{s}(t)$ jest transformatą Hilberta $s(t)$, $*$ oznacza splot, $\mathcal{P}$ wartość główną całki.

Rozpatrujemy sygnał

$$u(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(\mathcal{M}(s(t)) u_0 e^{\mathrm{j}\omega t}), \tag{72}$$

$s(t) = mf(t)$, $0 \leqslant m \leqslant 1$, $|f(t)|_{\max} = 1$, średnia $f(t) = \overline{f(t)} = 0$, $a \in (0,1)$, $b, c \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = \big(a + bs(t) + \mathrm{j}c\widehat{s}(t)\big)u_0 e^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{73}$$

Zakładamy, że

$$f(t) = f_0 \cos\omega t + \widetilde{\varepsilon}(t), \tag{74}$$

gdzie $\widetilde{\varepsilon}(t)$ oznacza biały szum. W ten sposób możemy zdefiniować wszystkie rodzaje modulacji i zbadać przyczynowy wpływ sygnału $f(t)$ na sygnał dany (jeśli został zmodulowany).

Dla $a = b = 1$, $c = 0$ mamy tzw. AM (*Amplitude Modulation*) — modulację amplitudy,

$$z_{\mathrm{AM}}(t) = u_0(1 + mf(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t}, \quad u_{\mathrm{AM}} = \operatorname{Re} z_{\mathrm{AM}}(t). \tag{75}$$

W dziedzinie częstotliwości mamy

$$\widetilde{z}_{\mathrm{AM}}(\omega) = A(\omega - \omega_0) \tag{76}$$

$$A = u_0\big(2\pi\delta(\omega) + mF(\omega)\big), \tag{77}$$

$F(\omega)$ jest transformatą Fouriera $f(t)$, czyli

$$u_{\mathrm{AM}}(\omega) = \tfrac{1}{2}[A(\omega + \omega_0) + A(\omega - \omega_0)]. \tag{78}$$

Dla $a = c = 0$, $b = 1$ mamy AM-SC (*Amplitude Modulation with Suppressed Carrier*), tj.

$$z_{\mathrm{AM-SC}}(t) = mu_0 f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = a(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{79}$$

$$u_{\mathrm{AM-SC}}(t) = \operatorname{Re}(z_{\mathrm{AM-SC}}(t)) = a(t)\cos\omega_0 t. \tag{80}$$

W dziedzinie częstotliwości

$$z_{\mathrm{AM-SC}}(\omega) = A(\omega - \omega_0) = mu_0 F(\omega - \omega_0) \tag{81}$$

$$u_{\mathrm{AM-SC}}(\omega) = \tfrac{1}{2}(A(\omega + \omega_0) + A(\omega - \omega_0)) = \tfrac{mu_0}{2}(F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)). \tag{82}$$

Biorąc $a = 0$, $b = c = 1$, otrzymujemy SSB-SC (*Simple Sideband with Suppressed Carrier*), czyli

$$z_{\mathrm{SSB-SC}}(t) = u_0(mf(t) + \mathrm{j}m\widehat{f}(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = (a(t) + \mathrm{j}\widehat{a}(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t}. \tag{83}$$

Zatem mamy

$$u_{\mathrm{SSB-SC}}(t) = a(t)\cos\omega_0 t - \widehat{a}(t)\sin\omega_0 t. \tag{84}$$

W dziedzinie częstotliwości

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_{\mathrm{SSB-SC}}(\omega) &= A(\omega - \omega_0) + \mathrm{j}\widehat{A}(\omega - \omega_0) = [1 + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)]A(\omega - \omega_0) \\
&= \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0, \\ 2A(\omega - \omega_0), & \omega > \omega_0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_{\mathrm{SSB-SC}}(\omega) &= \tfrac{1}{2}\{(1 - \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0))A(\omega + \omega_0) + (1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0))A(\omega - \omega_0)\} \\
&= \begin{cases} A(\omega + \omega_0), & \omega < -\omega_0, \\ 0, & -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ A(\omega - \omega_0), & \omega > \omega_0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{86}$$

Jeżeli $a = 0$, $b = -c = 1$, to mamy podobnie

$$z_{\mathrm{SSB-SC}}(t) = (a(t) - \mathrm{j}\widehat{a}(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{87}$$
$$u_{\mathrm{SSB-SC}}(t) = a(t)\cos\omega_0 t + \widehat{a}(t)\sin\omega_0 t. \tag{88}$$

W dziedzinie częstotliwości

$$\begin{aligned}\widetilde{z}_{\mathrm{SSB-SC}}(\omega) &= (1 + \mathrm{sgn}(\omega - \omega_0))A(\omega - \omega_0)\\ &= \begin{cases} 2A(\omega - \omega_0), & \omega < \omega_0,\\ 0, & \omega > \omega_0,\end{cases}\end{aligned} \tag{89}$$
$$\begin{aligned}\widetilde{u}_{\mathrm{SSB-SC}}(\omega) &= \tfrac{1}{2}\{(1 + \mathrm{sgn}(\omega + \omega_0))A(\omega + \omega_0) + (1 - \mathrm{sgn}(\omega - \omega_0))A(\omega - \omega_0)\}\\ &= \begin{cases} A(\omega + \omega_0), & \omega > -\omega_0,\\ 0, & \omega < \omega_0,\ \text{lub } \omega > \omega_0,\\ A(\omega - \omega_0), & \omega < \omega_0.\end{cases}\end{aligned} \tag{90}$$

Dla $a = 1$, $b = c = 1$ mamy SSB (*Single Side Band*) ze wstęgą górną lub dla $b = -c = 1$ SSB ze wstęgą dolną. Mamy

$$z_{\mathrm{SSB}}(t) = u_0(1 + mf(t) \pm \mathrm{j}m\widehat{f}(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = (u_0 + a(t) \pm \mathrm{j}\widehat{a}(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{91}$$
$$u_{\mathrm{SSB}}(t) = u_0\cos\omega_0 t + a(t)\cos\omega_0 t \mp \widehat{a}(t)\sin\omega_0 t \tag{92}$$

lub

$$u_{\mathrm{SSB}}(t) = \sqrt{(u_0 + a(t))^2 + \widehat{a}^2(t)}\cos\Big(\omega_0(t) \pm \mathrm{arctg}\,\frac{\widehat{a}(t)}{u_0 + a(t)}\Big). \tag{93}$$

W ten sposób przedstawiliśmy systemy modulacji amplitudy, które są liniowymi systemami modulacji. Badanie przyczynowości wg Grangera będzie tu polegało na wprowadzeniu do zaszumionego sygnału danego o dużej częstotliwości sygnału małej częstotliwości z szumem (zgodnie oczywiście ze schematem modulacji). Jeśli wartość wariancji zmniejszy się, będziemy mówili, że sygnał o małej częstotliwości wpływa przyczynowo na sygnał o wielkiej częstotliwości.

Podana wyżej modulacja używała operatora modulacji, który był liniowy. Możemy również rozpatrywać nieliniowe operatory modulacji

$$\mathcal{M}(s(t)) = e^{iV(s(t))} \tag{94}$$
$$V(s(t)) = \varphi(t) = k_{\mathrm{p}}s(t) \tag{95}$$
$$V(s(t)) = \varphi(t) = k_{\mathrm{f}}\int_0^t s(\tau)\,d\tau. \tag{96}$$

Operatory (95) i (96) dają nam znaną już modulację fazy i częstotliwości, o której już pisaliśmy.

Zgodnie z prezentowanym teraz formalizmem mamy

$$z_{\mathrm{PM}}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}(\omega_0 t + k_{\mathrm{p}}s(t) + \varepsilon_1)} \tag{97}$$
$$z_{\mathrm{FM}}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}\left(\omega_0 t + k_{\mathrm{f}}\int_0^t s(\tau)d\tau + \varepsilon_1\right)}. \tag{98}$$

Oznaczamy

$$\Delta\varphi = |\varphi(t) - \omega_0 t|_{\max} \tag{99}$$

$$\Delta\omega = |\omega_i(t) - \omega_0|_{\max} \tag{100}$$

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \tag{101}$$

$$\omega_{i\mathrm{PM}} = \omega_0 + k_\mathrm{p}\,\frac{ds}{dt} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \tag{102}$$

$$\omega_{i\mathrm{FM}}(t) = \omega_0 + k_\mathrm{f} s(t) + \frac{d\varepsilon_1}{dt}. \tag{103}$$

(102) i (103) są efektywnymi częstotliwościami kołowymi w przypadku modulacji PM i FM.

$$\Delta\varphi_\mathrm{PM} = k_\mathrm{p}|s(t)|_{\max}, \quad \Delta\omega_\mathrm{PM} = k_\mathrm{p}\left|\frac{ds(t)}{dt}\right|_{\max} \tag{104}$$

$$\Delta\varphi_\mathrm{FM} = k_\mathrm{f}\left|\int_0^t s(\tau)\,d\tau\right|_{\max}, \quad \Delta\omega_\mathrm{FM} = k_\mathrm{f}|s(t)|_{\max} \tag{105}$$

$$f(t) = \frac{s(t)}{|s(t)|_{\max}} \tag{106}$$

$$|f(t)|_{\max} = 1, \quad \overline{f(t)} = 0 \tag{107}$$

$$z_\mathrm{PM}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}(\omega_0 t + \Delta\varphi f(t))} \tag{108}$$

$$u_\mathrm{PM}(t) = \mathrm{Re}\, z_\mathrm{PM}(t) = u_0\cos(\omega_0 t + \Delta\varphi f(t)) \tag{109}$$

$$z_\mathrm{FM}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}\left(\omega_0 t + \Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)} \tag{110}$$

$$u_\mathrm{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_\mathrm{FM}(t) = u_0\cos\Big(\omega_0 t + \Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big), \tag{111}$$

$\overline{f(t)}$ oznacza średnią funkcji $f(t)$.

Rozpatrzmy w tym formalizmie modulację FM. Niech

$$\left|\Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right|_{\max} \ll 1. \tag{112}$$

Zatem

$$e^{\mathrm{j}\Delta\omega\int_0^t f(\tau)d\tau} \simeq 1 + \mathrm{j}\Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,d\tau \tag{113}$$

$$z_\mathrm{FM}(t) = u_0(1 + \mathrm{j}a(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{114}$$

$$u_\mathrm{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_\mathrm{FM}(t) \simeq u_0(\cos\omega_0 t - a(t)\sin\omega_0 t) \tag{115}$$

$$a(t) = \Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{116}$$

W dziedzinie częstotliwości

$$\widetilde{z}_\mathrm{FM}(\omega) = 2\pi u_0\delta(\omega - \omega_0) + \mathrm{j}u_0 A(\omega - \omega_0) \tag{117}$$

$$\widetilde{u}_\mathrm{FM}(\omega) = \pi u_0[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \mathrm{j}\tfrac{u_0}{2}(A(\omega - \omega_0) - A(\omega + \omega_0)). \tag{118}$$

Niech

$$s(t) = u_m\cos\omega_m t, \quad |s(t)|_{\max} = u_m, \quad f(t) = \cos\omega_m t, \tag{119}$$

$$\Delta\omega = k_\mathrm{f} u_m, \quad \Delta\varphi = k_\mathrm{f}\,\frac{u_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \beta. \tag{120}$$

β nazywamy indeksem modulacji. Wtedy

$$\omega_i(t) = \omega_0 + k_\mathrm{f} u_m \cos\omega_m t = \omega_0 + \Delta\omega \cos\omega_m t \tag{121}$$

$$z_\mathrm{FM}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}\omega_0 t} e^{\mathrm{j}\beta\sin\omega_m t} \tag{122}$$

lub

$$z_\mathrm{FM}(t) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) e^{\mathrm{j}(\omega_0 + n\omega_m t)}, \tag{123}$$

co jest naszym znanym już wzorem.

Dalej mamy

$$u_\mathrm{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_\mathrm{FM}(t) = u_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_0 + n\omega_m t), \tag{124}$$

$$J_n(\beta) = J_{-n}(\beta), \quad n \text{ parzyste,}$$

$$J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta), \quad n \text{ nieparzyste.}$$

Zatem

$$u_\mathrm{FM}(t) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta)\big(\cos(\omega_0 + n\omega_m t) + (-1)^n \cos(\omega_0 - n\omega_m t)\big) + u_0 J_0(\beta)\cos\omega_0 t. \tag{125}$$

Rozpatrując przypadek FM w podanym formalizmie mamy dla

$$|\Delta\varphi| \ll 1 \tag{126}$$

$$e^{\mathrm{j}\Delta\varphi f(t)} \simeq 1 + \mathrm{j}\Delta\varphi f(t). \tag{127}$$

$\Delta\varphi$ nazywamy *dewiacją* fazy.

Zatem

$$z_\mathrm{PM}(t) = u_0(1 + \mathrm{j}a(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{128}$$

$$u_\mathrm{PM}(t) = \mathrm{Re}\, z_\mathrm{PM}(t) = u_0\cos\omega_0 t - a(t)\sin\omega_0 t, \tag{129}$$

gdzie

$$a(t) = \Delta\varphi f(t). \tag{130}$$

Gdy

$$s(t) = u_m \sin\omega_m t, \tag{131}$$

to

$$\Delta\varphi = k_\mathrm{p} u_m, \quad \Delta\omega = k_\mathrm{p} u_m \omega_m = \Delta\varphi\omega_m. \tag{132}$$

W ogólności mamy

$$z_\mathrm{PM}(t) = u_0 e^{\mathrm{j}\omega_0 t} e^{\mathrm{j}\Delta\varphi\sin\omega_m t} = u_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(\Delta\varphi) e^{\mathrm{j}(\omega_0 + n\omega_m t)} \tag{133}$$

$$\begin{aligned} u_\mathrm{PM}(t) &= \mathrm{Re}\, z_\mathrm{PM}(t) \\ &= u_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\Delta\varphi)\big(\cos(\omega_0 + n\omega_m t) + (-1)^n \cos(\omega_0 - n\omega_m t)\big) + u_0 J_0(\Delta\varphi)\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{134}$$

Warto wprowadzić szerokości pasma częstotliwości w obu przypadkach:

$$B_{\mathrm{FM}} = 2(\Delta\omega + \omega_m), \quad \beta > 0. \tag{135}$$

Łatwo zauważyć, że

$$B_{\mathrm{FM}} \simeq 2\Delta\omega \quad \text{dla } \Delta\varphi > 0.5 \tag{136}$$
$$B_{\mathrm{PM}} \simeq 2(\Delta\varphi + 2)\omega_{\mathrm{M}}, \tag{137}$$

gdzie ω_{M} jest ograniczeniem sygnału modulowanego.

Dla przypadku $\Delta\varphi > 10$ mamy

$$B_{\mathrm{PM}} \simeq 2\Delta\varphi\omega_m. \tag{138}$$

W przypadku modulacji AM mamy oczywiście

$$B_{\mathrm{AM}} = 2\omega_{\mathrm{M}}, \quad B_{\mathrm{FM}} = 2(\Delta\omega + \omega_{\mathrm{M}}). \tag{139}$$

Możemy wprowadzić ogólny operator modulacji $\mathcal{M}(t; s(t))$ taki, że sygnał zmodulowany jest dany przez

$$z(t) = \mathcal{M}(t; s(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t}, \tag{140}$$

czyli

$$u(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re}\{\mathcal{M}(t; s(t))e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\}, \tag{141}$$
$$s(t) = s_0(t) + \varepsilon(t), \tag{142}$$

gdzie $s(t)$ jest sygnałem deterministycznym, a $\varepsilon(t)$ szumem. Rozpatrzmy jeszcze przekształcenia sygnałów zmodulowanych kątowo (tj. fazowo). Niech

$$u_{\odot} = F(u_I) \tag{143}$$
$$u_I(t) = u_i \cos\Big(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta + \varepsilon\Big). \tag{144}$$

Wprowadźmy nową zmienną czasową

$$\tau(t) = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{145}$$

Zatem mamy

$$u_I(\tau) = u_i \cos(\omega_0\tau + \varepsilon) = u_i(\cos\omega_0\tau\cos\varepsilon - \sin\omega_0\tau\sin\varepsilon). \tag{146}$$

Rozwińmy w szereg Fouriera wyrażenie (143) względem nowej zmiennej. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_0(\tau) = u_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{0n}\cos(n\omega_0\tau)\cos\varepsilon - v_{0n}\sin(n\omega_0\tau)\sin\varepsilon) \\ = u_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(u_{0n}\cos\Big(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta\Big)\cos\varepsilon \\ - v_{0n}\sin\Big(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta\Big)\sin\varepsilon\Big) = u_0(t), \end{aligned} \tag{147}$$

gdzie

$$u_{0n} = \frac{\omega_0 C(n)}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} F(u_i \cos\omega_0\tau)\cos n\omega_0\tau\, d\tau, \quad C(0)=1,\ C(n)=2,\ n \geqslant 1 \tag{148}$$

$$v_{0n} = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} F(u_i \sin\omega_0\tau)\sin n\omega_0\tau\, d\tau. \tag{149}$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\begin{aligned} u_{0n}\cos\varepsilon &= \overline{u}_n \cos\eta_n \\ v_{0n}\sin\varepsilon &= \overline{u}_n \sin\eta_n \\ \operatorname{tg}\eta_n &= \frac{v_{0n}}{u_{0n}}\operatorname{tg}\varepsilon, \end{aligned} \tag{150}$$

mamy

$$\overline{u}_n = \sqrt{u_{0n}^2\cos^2\varepsilon + v_{0n}^2\sin^2\varepsilon} \tag{151}$$

$$u_0(t) = u_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n \cos\Big(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta + \eta_n(t)\Big), \tag{152}$$

gdzie $\eta_n(t)$ jest przekształconym białym szumem.

Do porównania z sygnałem (152) możemy używać sygnału

$$z_n(t) = z_{0n}\cos\Big(n\omega_0 t + n\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta + \widetilde{\varepsilon}(t)\Big), \tag{153}$$

gdzie $\widetilde{\varepsilon}(t)$ jest sygnałem stochastycznym.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład sygnału zmodulowanego kątowo

$$u_i(t) = u_i\cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \varepsilon(t)) = \mathrm{Re}(z_i(t)) = \mathrm{Re}\big(u_i e^{\mathrm{j}\omega_0 t} e^{\mathrm{j}\varphi(t)} e^{\mathrm{j}\varepsilon(t)}\big) \tag{154}$$

$$\varphi(t) = \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta \tag{155}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot\varphi(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t). \tag{156}$$

Rozpatrzmy filtrację tego sygnału za pomocą filtru o charakterystyce $h(t)$ w dziedzinie czasu. Mamy

$$u_0(t) = \int_0^t h(\tau) u_i(t-\tau)\, d\tau = u_i\,\mathrm{Re}\Big\{e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\int_0^t h(\tau) e^{-\mathrm{j}\omega_0\tau} e^{\mathrm{j}\varphi(t-\tau)} e^{\mathrm{j}\varepsilon(t-\tau)}\, d\tau\Big\}. \tag{157}$$

Niech

$$f(t) = \cos\omega_{\mathrm{M}}(t). \tag{158}$$

Weźmy pod uwagę rozwinięcie w szereg

$$\varphi(t-\tau) = \varphi(t) - \dot\varphi(t)\tau + \frac{1}{2!}\ddot\varphi(t)\tau^2 + \dots \tag{159}$$

$$e^{\mathrm{j}\varphi(t-\tau)} = e^{\mathrm{j}\varphi(t)} e^{-\mathrm{j}\dot\varphi(t)\tau} e^{\mathrm{j}(\frac{1}{2!}\ddot\varphi(t)\tau^2+\dots)}. \tag{160}$$

Niech

$$\varphi(t-\tau) \simeq \varphi(t) - \dot\varphi(t)\tau \tag{161}$$

$$|\dot\varphi(t)|_{\max} = \Delta\omega, \quad |\ddot\varphi(t)|_{\max} = \Delta u_0\omega_{\mathrm{M}}. \tag{162}$$

Wtedy otrzymamy

$$u_0(t) = u_i \operatorname{Re}\Big\{e^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi(t))} \int_0^\infty h(\tau) e^{-\mathrm{j}(\omega_0+\dot{\varphi}(t))\tau} e^{\mathrm{j}\varepsilon(t-\tau)}\Big\}. \tag{163}$$

Wtedy

$$u_0(t) = U_0(t) \cos\big(\omega_0 t + \varphi(t) + \arg H(\{\omega_i(t)\}, \{\varepsilon\})\big) \tag{164}$$

$$U_0(t) = U_i \big|H(\{\omega_i(t)\}, \{\varepsilon\})\big|, \tag{165}$$

gdzie

$$H(\{\omega_i(t)\}, \{\varepsilon\}) = \int_0^\infty h(\tau) e^{-\mathrm{j}\omega_i(t)\tau + \mathrm{j}\varepsilon(t-\tau)}\, d\tau. \tag{166}$$

W ten sposób mamy pewien formalizm do badania przyczynowości Grangera przekształconych sygnałów.

Rozpatrzmy jeszcze demodulację. Polega ona na otrzymaniu sygnału niskiej częstotliwości ze zmodulowanego sygnału wielkiej częstotliwości. W przypadku modulacji amplitudy AM (każdego typu) demodulacja polega na znalezieniu obwiedni sygnału. Zatem analiza przyczynowości Grangera będzie polegała na analizie sygnału obwiedni i porównaniu go z sygnałem niskiej częstotliwości. Jeśli suma tych sygnałów będzie miała mniejszą wariancję niż sygnał obwiedni, wtedy będziemy mogli powiedzieć, że dany sygnał wpływa na sygnał wielkiej częstotliwości. W przypadku modulacji kątowej sytuacja jest bardziej skomplikowana. Np. mamy

$$u(t) = \beta\Big(\Omega + k_\mathrm{p} \frac{dx(t)}{dt} + \widetilde{\varepsilon}_2\Big) = \beta\Omega(t), \tag{167}$$

gdzie

$$\Omega(t) = \Omega + k_\mathrm{p} \frac{dx(t)}{dt} + \widetilde{\varepsilon}_2. \tag{168}$$

Np.

$$x(t) = x_0 \sin \omega t. \tag{169}$$

Sygnał ten możemy porównać z sygnałem podejrzewanym o bycie przyczyną zmodulowanego sygnału wielkiej częstotliwości.

Możemy to uzyskać odzyskując fazę sygnału wielkiej częstotliwości lub jego częstotliwość (zmienną). Wtedy porównujemy z fazą sygnał podejrzewany o bycie przyczyną sygnału wielkiej częstotliwości. W przypadku, gdy otrzymaliśmy częstotliwość, porównujemy pochodną sygnału z otrzymaną częstotliwością. Wróćmy jeszcze do demodulacji amplitudy. Mamy wtedy

$$y(t) = x(t) \cos \Omega t \tag{170}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \widetilde{\varepsilon}), \tag{171}$$

gdzie $\widetilde{\varepsilon}$ jest szumem. Możemy stosować demodulację homodynową, tj. rozpatrywać sygnał

$$y_d(t) = y(t) \cos \Omega t = \tfrac{1}{2} x(t) + \tfrac{1}{2} x(t) 2\Omega t. \tag{172}$$

Dokonując filtracji dolnoprzepustowej otrzymujemy sygnał modulujący $x(t)$. Możemy również dokonać demodulacji heterodynowej. Wtedy mamy generator częstotliwości pośredniej ω_p i w podobny sposób rozpatrujemy sygnał zdemodulowany

$$y_d(t) = y(t) \cos \omega_\mathrm{p} t = \frac{x(t)}{2} [\cos(\Omega - \omega_\mathrm{p})t + \cos(\Omega + \omega_\mathrm{p})t]. \tag{173}$$

Dokonujeny filtracji górnoprzepustowej i znajdujemy obwiednię pozostałego sygnału.

W formalizmie modulacji i demodulacji rozpatrywaliśmy sygnały deterministyczne zaszumione szumem $\varepsilon(t)$. Możemy jednak rozpatrywać sygnały stochastyczne. Np.

$$\eta(t) = \eta_0 \cos(\Omega t + \Phi) \tag{174}$$

lub

$$\eta(t) = H(t) \cos\theta(t), \tag{175}$$

gdzie

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}, \tag{176}$$

$$\theta(t) = \int \Omega(t)\, dt, \quad \theta(t) = 2\pi \int f(t)\, dt. \tag{177}$$

$\theta(t)$, $H(t)$ są procesami stochastycznymi, a η_0, Ω, Φ zmiennymi losowymi. W ten sposób możemy stosując metodę przyczynowości Grangera dojść do przyczynowego oddziaływania kanałów o różnej częstotliwości.

Podane tutaj przykłady demodulacji i modulacji analogowej pochodzą z radiotechniki i są tradycyjnie wykładane na wydziałach elektroniki na całym świecie. Trudno jest powiedzieć, kto pierwszy opublikował cytowane tu wzory, oprócz dodanego szumu oraz prób analizy przyczynowości (co jest osobistym wkładem autora). Nie rozpatrywaano tutaj żadnych rodzajów modulacji i demodulacji cyfrowej, co oczywiście można dodać i dokonać analizy przyczynowościowej. Występujące tu procesy modulacji i demodulacji mogą występować w tej lub innej formie w neurofizjologii na różnych poziomach struktury, tj. pojedynczych neuronów (np. wpływ jednego neuronu na LTP (Long Term Potentiation) drugiego), także połączeń synaptycznych. Może to mieć wpływ na konsolidację i rekonsolidację pamięci. Oddziaływanie jednych struktur mózgowych na drugie, np. rytm γ. Można również poszukać swojego rodzaju połączeń informacyjnych w mózgu, tj. sprawdzić, czy istnieje przyczynowość w sensie Grangera między odległym procesem niskiej częstotliwości a fluktuacjami w wyższej częstotliwości innych procesów. W przypadku odkrycia przyczynowości w sensie Grangera można by stwierdzić, że istnieje kanał przesyłania informacji między tymi strukturami. W ten sposób można by było mówić o rozproszonej (w sensie przestrzennym) pracy mózgu, a więc i procesów myślenia.

Literatura

[1] Baskałow I. Światosław, *Sygnały i układy radiotechniczne.* PWN, Warszawa 1991.

[2] Blinowska K. J. and Żygierewicz J., *Practical Biomedical Signal Analysis using Matlab.* CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York 2012.

[3] Cochrane J. H., *Time Series for Macroeconomics and Finance.* Springer, 1987.

[4] Granger C. J. W., *Investigating causal relations by economic models and cross-spectral methods.* Econometrica **37** (1969), p. 424.

[5] Kalinowski M. W., *Kwaterniony i ich zastosowania.*

[6] Kamiński M., Liang H. L., *Causal influence: advances in neurosignal analysis.* Critical Reviews in Biomedical Engineering **33** (2006), p. 347.

[7] Niedźwiecki M., Rasiukiewicz M., *Nieliniowe elektroniczne układy analogowe*. WNT, Warszawa 1994, wyd. III.

[8] Rutkowski I., *Filtry adaptacyjne i adaptacyjne przetwarzanie sygnałów*. WNT, Warszawa 1994.

[9] Szabatin J., *Podstawy teorii sygnałów*. WKŁ, Warszawa 1982.

[10] Voelker H., *Toward a Unified Theory of Modulation*, I. Proceedings of the IEEE **54** (1966), p. 340.

[11] Voelker H., *Toward a Unified Theory of Modulation*, II. Proceedings of the IEEE **54** (1966), p. 735.

[12] Wu Jianhua, Liu Xuguang, Feng Jianfeng, *Detecting causality between different frequencies*. Journal of Neuroscience Methods **167** (2008), p. 367.